www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

ECOLE NATIONALE DE L'AVIATION CIVILE — Mai 1989

CONCOURS EXTERNES DE RECRUTEMENT
DES INGENIEURS DES ETUDES ET DE L'EXPLOITATION DE L'AVIATION CIVILE
C.F. et C.T.

Epreuve optionnelle de MATHEMATIQUES Durée : 4 heures Coef. : 2

. NOTATIONS ET DEFINITIONS

IN désigne l'ensemble des entiers naturels.

IN* désigne l'ensemble des entiers naturels strictement positifs.

On appelle nombre premier tout entier naturel strictement supérieur à 1 qui n'est divisible que par 1 et lui-même (1 n'est pas considéré comme un nombre premier).

n! désigne, pour tout n entier naturel non nul, le produit des n premiers entiers de 1 à n, encore appelé factoriel de n.

C_m^n désigne, pour tous entiers naturels n et m non nuls avec n strictement inférieur à m, le nombre de combinaisons à n éléments parmi m.

On rappelle que $C_m^n = \frac{m!}{n!\,(m-n)!}$.

E(q) désigne, pour tout rationnel positif q, la partie entière de ce rationnel, soit l'unique entier vérifiant $E(q) \leqslant q < E(q) + 1$.

Card(IP) désigne, pour tout sous-ensemble fini IP de IN, le nombre d'éléments de IP, encore appelé cardinal de IP.

Log (x) désigne, pour tout réel x strictement positif, le logarithme népérien de x.

Remarque : Les candidats sont autorisés à admettre des résultats donnés par l'énoncé du problème et qu'ils n'arriveraient pas à démontrer pour traiter la suite du problème.

PROBLEME

Le but de ce problème est la recherche d'un encadrement du nombre, désigné ici par P(n), de nombres premiers inférieurs au sens large à n, pour tout n entier naturel strictement supérieur à 1.

1°) Etablir pour tout entier n strictement supérieur à 1 la double inégalité :

$$\frac{1}{n} \cdot 2^{2n-1} < C_{2n}^n < 2^{2n-1} .$$

2°) On se donne n entier strictement supérieur à 1 et p nombre premier vérifiant la double inégalité $n < p < 2n$.

Montrer que p divise C_{2n}^n.

En déduire que pour tout n entier strictement supérieur à 1 on a l'inégalité :

$$n^{P(2n) - P(n)} < C_{2n}^n .$$

3°) On se donne n entier strictement supérieur à 1 et p nombre premier inférieur à n au sens large.

On pose $a_k = E(n.p^{-k})$, pour tout entier k non nul.

a/ Montrer que la suite des a_k , pour k décrivant IN* , est une suite stationnaire, nulle à partir d'un certain rang.

En déduire que la série de terme général a_k est une série convergente et que sa somme $s = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ est un nombre entier supérieur ou égal à 1.

b/ On désigne par IF_k l'ensemble des entiers compris entre 1 et n au sens large et divisibles par p^k.

Montrer que pour tout entier k non nul, on a $\text{card}(IF_k) = a_k$.

En déduire que, s étant l'entier défini au a/, n! est divisible par p^s et non divisible par p^{s+1} .

4°) L'entier n étant toujours fixé, strictement supérieur à 1, on se donne maintenant P nombre premier inférieur au sens large à 2n.

On pose pour tout entier k non nul : $b_k = E(2n.p^{-k}) - 2E(n.p^{-k})$.

a/ Montrer que la série de terme général b_k est convergente et que sa somme est un entier naturel.

b/ On pose $r = \sum_{k=1}^{+\infty} b_k$. Montrer que p^r divise C_{2n}^n et que C_{2n}^n n'est pas divisible par p^{r+1} .

c/ Montrer que b_k est, pour tout entier k strictement positif, égal à 0 ou 1.

En déduire : $p^r \leqslant 2n$.

TSVP

d/ En déduire que pour tout entier n strictement supérieur à 1, on a l'inégalité :

$$C_{2n}^{n} \leqslant (2n)^{P(2n)} .$$

5°) a/ Etablir pour tout entier n strictement supérieur à 1, l'inégalité :

$$P(2n) > \frac{2n \operatorname{Log} 2}{\operatorname{Log}(2n)} - 1 .$$

b/ Montrer que l'inégalité : $P(m) > m \dfrac{\operatorname{Log} 2}{\operatorname{Log} m} - 1$

est vraie pour tout entier m strictement supérieur à 2, que m soit pair ou impair.

6°) Etablir successivement les résultats suivants :

a/ $P(2n) - P(n) < \dfrac{2n \operatorname{Log} 2}{\operatorname{Log} n}$, pour tout entier n strictement supérieur à 1 ;

b/ $P(2^k) < \dfrac{1}{k} 2^{k+2}$, pour tout entier k strictement positif ;

c/ $P(n) < \dfrac{8n \operatorname{Log} 2}{\operatorname{Log} n}$, pour tout entier n strictement supérieur à 1.

7°) On pose $\theta(n) = \dfrac{1}{n} P(n) \operatorname{Log} n$, pour tout entier n strictement supérieur à 1.

a/ Déduire des questions 5 et 6 que $\theta(n)$ est une fonction bornée de n lorsque n décrit $\mathbb{N}^* - \{1\}$.

b/ On suppose qu'il existe n_0 , entier naturel et A, constante réelle strictement positive, tels que pour tout entier n strictement supérieur à n_0, on ait :

$$\theta(n) < (2 + A) \operatorname{Log} 2.$$

Montrer qu'il existe alors un entier n_1 , tel que pour tout entier n strictement supérieur à n_1 , on ait :

$$\theta(2n) < (2 + \tfrac{2A}{3}) \operatorname{Log} 2.$$

Montrer que lorsque n tend vers $+\infty$ $\theta(2n)$ et $\theta(2n-1)$ sont équivalents.

En déduire qu'il existe un entier naturel n_2 , tel que pour tout entier n, pair ou impair, strictement supérieur à n_2 , on ait :

$$\theta(n) < (2 + \tfrac{3A}{4}) \operatorname{Log} 2.$$

c/ Montrer que l'hypothèse du b/ est bien vérifiée, c'est-à-dire que l'on peut trouver A, réel strictement positif, et n_0 , entier naturel, tels que pour tout entier n strictement supérieur à n_0 , on ait :

$$\theta(n) < (2 + A) \operatorname{Log} 2 .$$

En déduire que pour tout réel ϵ , strictement positif, il existe un entier N , tel que pour tout entier n strictement supérieur à N, on ait :

$$\operatorname{Log} 2 - \epsilon < \theta(n) < 2 \operatorname{Log} 2 + \epsilon .$$

8°) On désigne par $\mathbb{P}$ l'ensemble des nombres premiers.

a/ Montrer qu'il existe une unique bijection Q de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{P}$ telle que :

$$\forall (n_1, n_2) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \quad , \quad n_1 < n_2 \implies Q(n_1) < Q(n_2).$$

b/ Montrer que pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$P\left(Q(n)\right) = n.$$

c/ Déduire du 7°)c/ que $\operatorname{Log}\left(Q(n)\right)$ est équivalent à $\operatorname{Log} n$ lorsque n tend vers $+\infty$.

d/ Montrer que lorsque n décrit l'ensemble des entiers naturels strictement supérieurs à 1, le quotient $\dfrac{Q(n)}{n \operatorname{Log} n}$ reste compris entre deux constantes réelles strictement positives (on ne cherchera pas de valeurs explicites de ces constantes).

——==oOOo==——

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail